MATHÉMATIQUES SP 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE :

Dans le plan affine euclidien orienté (unité 5 cm) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'axe polaire $(O, \vec{i})$, on considère la courbe Γ définie par son équation polaire : $r(\theta) = \left(\sin\left(\frac{\theta}{4}\right) \right)^4$.

1° Construire Γ.

2° Calculer la longueur totale de la courbe Γ en cm.

3° On oriente Γ dans le sens des θ croissants ; soit $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire de la courbe orientée en un point $M(\theta)$ et $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire directement perpendiculaire à $\vec{t}$. Pour θ appartenant à $[0, 2\pi]$, déterminer l'angle $(\vec{i}, \vec{t})$ puis le rayon de courbure au point $M(\theta)$ de la courbe Γ.

4° En tout point M de Γ, distinct du pôle O, on considère la droite Δ_M, perpendiculaire à la droite (OM) en M. Si M est confondu avec O, Δ_0 est la perpendiculaire à la tangente à Γ en O.

a) Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe E des droites Δ_M.

b) Déterminer une équation polaire de E, puis construire E.

PROBLEME :

N.B.: Les différentes parties du problème sont largement indépendantes.

Notations : on note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme :

$$M(a_1, a_2, a_3, b) = \begin{pmatrix} a_1 & b & b \\ b & a_2 & b \\ b & b & a_3 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Préciser sa dimension.

Pour a, a', b, b', éléments de $\mathbb{C}$,
calculer M(a, a, a, b). M(a', a', a', b').

2) Comment doit-on choisir les nombres complexes a, a', b, b',
pour que M(a, a, a, b) . M(a', a', a', b') = I ?

En déduire, lorsqu'elle existe, l'expression de la matrice inverse de
M(a, a, a, b).

3) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 - 3 \\ x + ay + z = 2a - 4 \\ x + y + az = -2 \end{cases}$$

où a est un élément de $\mathbb{C}$.

PARTIE II

Dans cette partie, on pose A = M(1,1,1,-1)

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers naturels u_n et v_n tels que :

$$A^n = u_n A + v_n I.$$

Préciser les relations de récurrence donnant u_n et v_n en fonction de u_{n-1} et v_{n-1} pour $n \geq 2$.

2) Déterminer u_n et v_n en fonction de n puis A^n.

3) On pose Q = 2I - A. Calculer Q^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et retrouver à partir de là l'expression de A^n.

4) Indiquer, en quelques lignes, une autre méthode permettant de calculer A^n (on ne demande pas de faire les calculs correspondants).

PARTIE III

Dans cette partie, on pose Ba = M (1 + a, 1, 1-a, -1) avec $a \in \mathbb{R}^*$

1) Déterminer le polynôme caractéristique P de la matrice Ba.

En déduire que Ba admet trois valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 qui vérifient :

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3.$$

2) Si λ est l'une des valeurs propres de Ba, déterminer le vecteur propre associé de première composante égale à $2 - \lambda$.

A SUIVRE

3) *On choisit désormais a = -2*

a) On considére l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : \lambda \longrightarrow \frac{1}{6}\,(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 8)$$

Montrer que :

. $\varphi(\lambda_2) = \lambda_2$

. φ est une application de [1,2] dans [1,2]

. $\forall \lambda \in [1,2] \mid \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_2) \mid \leq \frac{1}{3} |\lambda - \lambda_2|$

b) En déduire que pour $x_0 \in [1,2]$, la suite (x_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$x_n = \varphi(x_{n-1})$, converge vers λ_2.

Donner les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 lorsque $x_0 = 1$ et indiquer une majoration de $| x_4 - \lambda_2 |$.

c) On prend pour valeur approchée de λ_2 la valeur x_4. En déduire les valeurs approchées de $\lambda_1 + \lambda_3$ et $\lambda_1\lambda_3$, puis les valeurs approchées de λ_1 et λ_3.

PARTIE IV

Dans cette partie, on prend a = - 2 et on note B la matrice B_{-2}

Soient x, y, z, trois fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle t.

On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

et on considère le système différentiel (S) : $\frac{dX}{dt} = BX + tW_1 + W_2$

où W_1 et W_2 sont deux matrices colonnes à 3 lignes et à coefficients réels donnés.

1) Déterminer la solution générale du système différentiel : $\frac{dX}{dt} = BX$

2) On cherche deux matrices colonnes Y_1 et Y_2 à 3 lignes et à coefficients réels constants telles que :

$X = tY_1 + Y_2$ vérifie (S) .

Déterminer Y_1 en fonction de B et W_1, puis Y_2 en fonction de B, W_2 et Y_1.

3) En déduire la solution générale de (S) lorsque

$$W_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

FIN